光州保健專門大學 論文集 第19輯(1994)
The Journal of Kwangju Health
College. Vol. XIX.

二變量 符號檢定法에 關한 硏究

임상병리과
전임강사 송 정

I. 序 論

새로 개발한 약품을 각 個人이 복용했을때, 복용전과 복용후의 血壓과 血糖을 측정하여 약품이 이들 두 變量에 영향을 미치는지의 여부를 알아 보기 위해 二變量 檢定法을 사용한다. 이 실험에서 두 變量의 觀測値들의 標本은

$$Z_i = (X_i, Y_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

라 한다. 이 標本은 二變量 中位數 $\delta = (\delta_1, \delta_2)$ 를 갖는 絶對連續分布函數 $F(x, y)$ 인 母集團으로부터의 標本이다.

본 論文에서는 二變量 位置母數 $\delta = (\delta_1, \delta_2)$ 에 對한 假說 $H_o : \delta = (0, 0)$ 對 $H_1 : \delta \neq (0, 0)$ 에 관한 檢定法들을 다룬다. Hotelling 의 T^2 檢定法은 分布函數 F 가 二變量 正規分布일때 사용하는 방법이고, 分布函數 F를 알 수 없을 때에 대해서는 J. L. Hodges[7], I. Blumen[3], B. M. Benett, S. K. Chatterjee[5], J. C. Lee[12]등이 二變量 符號檢定法을 硏究 재시하고 있다.

본 論文에서는 Hodges, Blumen, Lee 등의 二變量 符號檢定法을 相關係數 ρ와 有意水準 α, Mahalanobis 距離, 對立假說의 移動의 方向 θ의 변화에 따른 二變量 正規分布下에서의 檢定力을 比較코저 한다.

II. 符 號 檢 定 法

符號檢定은 符號檢定 절차에 사용된 假定들의 有效性을 주로 硏究하는데 초기 단계의 二變量 符號檢定法은 Hodges에 의해 만들어졌고, 그 후 Blumen이 또 다른 二變量 符號檢定法을 제시했다.

1. Hodges의 符號檢定法

Hodges는 一變量의 檢定法을 二變量으로 확장시켜, 二變量 中位數 $\delta = (\delta_1, \delta_2)$를 갖는 絶對連續分布函數인 母集團으로부터의 標本을 Zi 라 하고 中位數의 쌍이 $\delta = (0, 0)$인 歸無假說을 생각 하였다.

만약 가능한 이동의 방향을 안다면 一變量의 경우로 문제를 축소 할 수 있을 것이므로, 방향을 찾기위해 원점을 지나는 각 vector (X_i, Y_i)들의 방향으로 vector들을 映射시키고, 映射된 vector의 방향이 주어진 vector의 방향과 같은 vector들의 수의 최대값 M을 구하였다. Hodges는 M이 크면 觀測値들이 한 방향으로 이동되었다고 판단하여 歸無假說 $\delta = (0, 0)$을 棄却하고, M이 작으면 觀測値들이 여러 방향으로 이동이 일어났다고 판단하여 假說을 棄却하지 않는다.

檢定統計量의 正確하고 漸近的인 歸無假說下의 分布를 구하기 위해 vector Z_i와 $-Z_i$ 를 평면상에 나타내고 Z_i 에서 출발하여 시계 반대 방향으로 돌면서 부호가 + 이면 y 축으로 1 만큼, 부호가 − 이면 x 축으로 1 만큼 증가시키면서 계속 반복한다. $(U(j), V(j))$를 j번 후의 random walk 座標라 하면

$$U(0) = 0 = V(0)$$

$$U(j) + V(j) = j$$

$$U(n+j) = U(n) + V(j)$$

$$V(n+j) = V(n) + U(j)$$

의 관계를 만족하고, 檢定統計量[11]은

$$T_H = \max_{1 \le j \le 2n}(U(j) - V(j)) + \max_{1 \le j \le 2n}(V(j) - U(j))$$

이다.

2. Blumen의 符號檢定法

Blumen은 Hodges와 같은 歸無假說下에서 假說上의 中位數인 원점으로 부터 n 個 標本點들까지의 vector들의 기울기를 구하고, 양의 x 축과 각 vector가 이루는

각의 크기가 증가하도록 vector들의 순서를 정하여 j번째 vector가 中位數를 통과하는 수평선인 x 축의 위, 아래에 있는가에 따라서 각각 $a_j = \pm 1$이라 정하고 이웃하는 vector가 이루는 각이 $\frac{\pi}{n}$ 가 되도록 vector를 標準化하였다. 標準化된 vector들과 單位圓과의 교점의 좌표를 구하면 이 교점들의 중심은

$$\frac{v_1}{n} = \frac{1}{n}\sum a_j \cos\frac{\pi j}{n}$$

$$\frac{v_2}{n} = \frac{1}{n}\sum a_j \sin\frac{\pi j}{n} \qquad (단\ a_j = \pm 1)$$

이고 檢定統計量은

$$T_B = \frac{2(v_1^2 + v_2^2)}{n}$$

이다. 歸無假說下에서 v_1과 v_2는 각각 正規分布 $N(0, \frac{n}{2})$을 따른다. 이 統計量은 하나의 圓의 重力의 中心임을 直觀的으로 알 수 있다. 그리고 이 統計量은 큰 標本의 경우에 自由度가 2인 χ^2 分布를 한다.

3. Lee의 符號檢定法

Lee에 의한 符號檢定法은 歸無假說下에서 檢定統計量의 分布가 二項分布로서 간단하다는 사실에 주목 할 수 있다. 二變量分布로 부터의 標本

$$Z_i = (X_i, Y_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

가 주어지면 Z_i를 $X_i = r\cos\theta$, $Y_i = r\sin\theta$에 의한 極座標로 변환시키고 변환된 (r, θ)를 원점으로 부터 vector 까지의 길이가 감소 하도록 순서를 정하며, θ는 單位圓上의 한 점이라 하자. $i-1$개의 標本에 기초한 주어진 方向母數의 標本 推定値

$$\theta_{i-1} = \tan^{-1}\frac{\sum_{j=1}^{i-1}\cos\theta_j}{\sum_{j=1}^{i-1}\sin\theta_j}$$

를 계산하고 다음과 같은 규칙에 따라 θ_i의 값 t_i를 정한다.

$$t_i = \begin{cases} 1 & : \ |\theta_i - \theta_{i-1}| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & : \ 그외 \end{cases}$$

檢定統計量은

$$T_L = \sum_{i=2}^{n-1} t_i$$

이며 歸無假說下에서 T_L의 分布는 母數가 $B(\ n-1\ ,\ \frac{1}{2}\ )$인 二項分布를 따른다.

Ⅲ. 檢定法의 比較

Anderson[1)]에 따르면 $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ 이 二變量 正規分布로 부터의 標本일 때 平均 $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) = (0, \ldots, 0)$의 檢定法 중에서 檢定力이 Mahalanobis 距離 Δ^2 에 의존 할때는 線形變換에 의해 不變인 檢定法 중에 Hotelling의 T^2 檢定法이 최강력 檢定法임을 알고 있다.

Mahalanobis 距離는 두 母集團을 판별하는 문제에서 두 母集團 사이의 距離를 의미하며

$$\Delta^2 = \frac{1}{1-\rho^2}(\ \mu_x^2 - 2\rho\,\mu_x\mu_y + \mu_y^2\ )$$

에 의해 구해진다.

T^2 檢定法은 같은 Mahalanobis 距離下에서는 相關係數 ρ 와 對立假說의 移動方向 θ 가 달라도 檢定力이 같기때문에 對立假說의 이동 방향에 대해서 다른 符號檢定法과 檢定力을 비교하는 것은 의의가 있다.

각 檢定力을 비교하기 위해 平均 vector가 $(\ \mu_x\ ,\ \mu_y\ )$, 分散이 1 이고 相關係數 ρ인 二變量 正規分布를 對立假說下에서의 分布로 삼고, 相關係數 ρ, Mahalanobis 距離 Δ^2, 對立假說의 移動方向 θ 를 변화시키면서 有意水準이 0.0195 (n=10)와 0.05 (n=12)일때에 檢定力을 구하였다.

표 1 은 標本의 크기가 10일때 Hodges의 符號檢定法을 적용할 수 있는 가장 작은 有意水準인 0.0195에서 Hodges, Blumen, Lee들의 符號檢定法의 檢定力과 Hotelling의 T^2 檢定法의 檢定力[11)]을 나타냈으며, 표 1 을 이용하여 그림 1 을 나타냈다. 표 1 과 그림 1 에서 보면 對立假說의 移動方向이 $45°$ 에서 $60°$ 사이인

경우에는 Hotelling의 T^2 檢定法이나 다른 符號檢定法 보다 Lee 符號檢定法이 ρ에 관계없이 높은 檢定力을 나타내고 있고, 또 Blumen과 Hodges의 檢定法은 같은 Mahalanobis 距離下에서 檢定力이 거의 비슷하게 나타나고 있다.

< 표 1 > 標本의 크기 10, 有意水準 0.0195 일때의 檢定力

Δ		0.5				1.0			
ρ	θ	Ho.	Bl.	Lee	T^2	Ho.	Bl.	Lee	T^2
0.25	45°	0.105	0.105	0.112	0.099	0.350	0.350	0.442	0.438
	60°	0.096	0.096	0.115	0.099	0.360	0.364	0.434	0.438
	90°	0.095	0.094	0.088	0.099	0.403	0.403	0.373	0.438
	120°	0.080	0.079	0.085	0.099	0.375	0.374	0.338	0.438
0.5	45°	0.093	0.092	0.141	0.099	0.332	0.332	0.484	0.438
	60°	0.094	0.094	0.107	0.099	0.360	0.362	0.439	0.438
	90°	0.088	0.087	0.070	0.099	0.378	0.370	0.317	0.438
	120°	0.098	0.098	0.055	0.099	0.378	0.377	0.288	0.438
0.75	45°	0.092	0.091	0.141	0.099	0.386	0.385	0.501	0.438
	60°	0.088	0.084	0.107	0.099	0.396	0.396	0.365	0.438
	90°	0.091	0.090	0.054	0.099	0.381	0.380	0.206	0.438
	120°	0.090	0.090	0.037	0.099	0.363	0.363	0.162	0.438

< 그림 1 > 標本의 크기 10, 有意水準 0.0195일때의 각 檢定法의 檢定力 비교

< 그림 1.1 > Δ = 0.5 , ρ = 0.75 < 그림 1.2 > Δ = 1.0 , ρ = 0.75

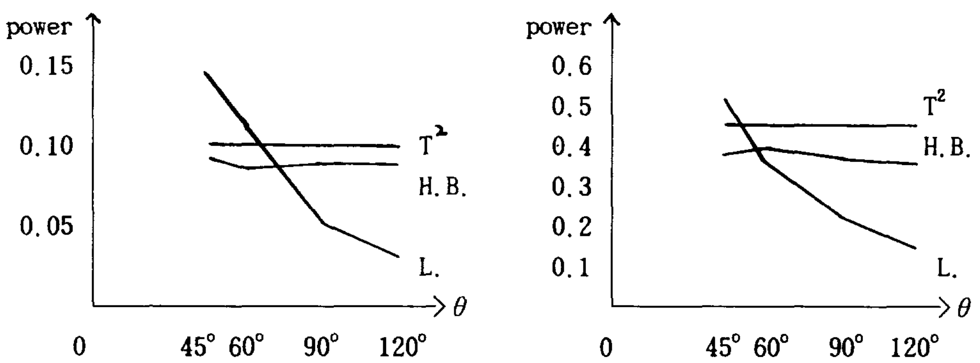


표 2 는 標本의 크기가 12이고 有意水準 0.05 일때의 檢定力을 나타내고 있고,

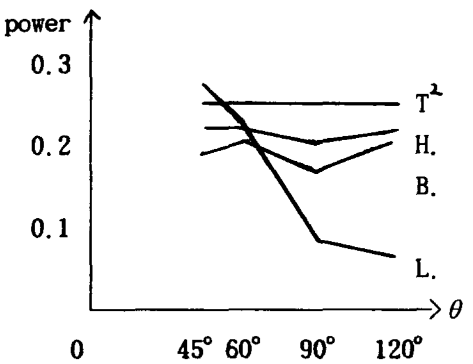
이를 그림으로 나타낸 것이 그림 2 이다. 對立假說의 移動方向이 45° 일때는 Lee 檢定法의 檢定力이 Hotelling의 T^2 檢定法의 檢定力[6] 보다 높은 것으로 나타났지만 60° 方向으로 移動이 일어날때는 Hotelling의 T^2 檢定法의 檢定力이 Lee 檢定法의 檢定力 보다 높게 나타났다.

< 표 2 > 標本의 크기 12, 有意水準 0.05 일때의 檢定力

Δ		0.5				1.0			
ρ	θ	Ho.	Bl.	Lee	T^2	Ho.	Bl.	Lee	T^2
0.25	45°	0.206	0.186	0.250	0.248	0.624	0.590	0.726	0.759
	60°	0.270	0.232	0.286	0.248	0.576	0.568	0.730	0.759
	90°	0.198	0.190	0.200	0.248	0.490	0.578	0.612	0.759
	120°	0.199	0.166	0.154	0.248	0.636	0.612	0.602	0.759
0.5	45°	0.224	0.186	0.286	0.248	0.604	0.582	0.698	0.759
	60°	0.198	0.184	0.220	0.248	0.572	0.590	0.662	0.759
	90°	0.214	0.196	0.180	0.248	0.614	0.564	0.572	0.759
	120°	0.186	0.202	0.162	0.248	0.580	0.572	0.484	0.759
0.75	45°	0.212	0.196	0.262	0.248	0.632	0.614	0.760	0.759
	60°	0.210	0.204	0.228	0.248	0.618	0.598	0.634	0.759
	90°	0.200	0.170	0.084	0.248	0.610	0.592	0.370	0.759
	120°	0.210	0.202	0.076	0.248	0.624	0.602	0.328	0.759

< 그림 2 > 標本의 크기 12, 有意水準 0.05일때 각 檢定法의 檢定力 비교

< 그림 2.1 > Δ = 0.5 , ρ = 0.75



< 그림 2.2 > Δ = 1.0 , ρ = 0.75

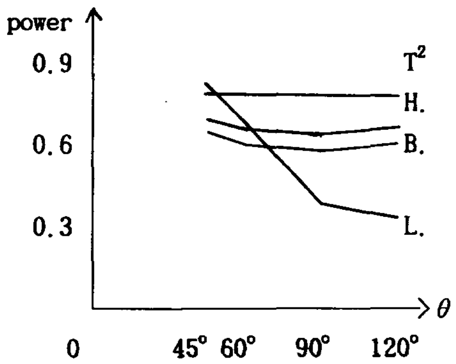
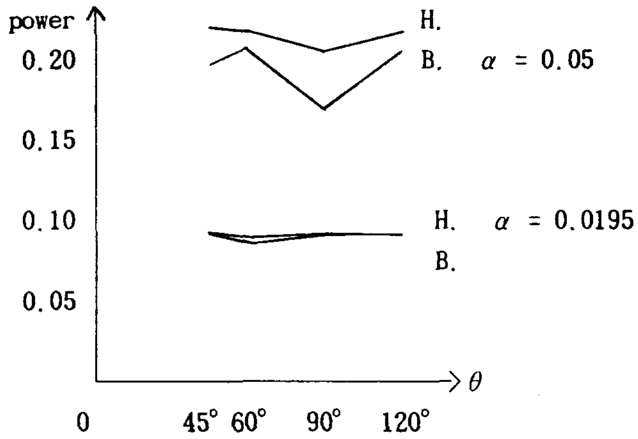


그림 3 에서 나타난바와 같이 Hodges와 Blumen의 檢定力은 有意水準이 0.0195일때는 거의 비슷하였으나 有意水準이 0.05일때는 Hodges의 檢定力이 Blumen의 檢定力 보다 강세를 나타내고 있다.

< 그림 3 > 有意水準이 0.0195 와 0.05 일때 Hodges와 Blumen 檢定法의 檢定力 비교

(Δ = 0.5 , ρ = 0.75)



Ⅳ. 結　　論

線形變換에 의해서 不變인 古典的인 母數 檢定法인 Hotelling의 T^2 檢定法과 Hodges 檢定法, Blumen 檢定法, Lee 檢定法을 비교하는데 있어서 對立假說의 移動의 방향이 45° 인 경우에는 標本의 크기와 有意水準에 관계없이 Lee 符號檢定法의 檢定力이 線形變換에 의해서 不變인 檢定法 중에서 최강력 檢定法인 Hotelling의 T^2 檢定法 보다도 높은 것으로 나타났다. 또 移動의 방향이 45° 에서 60° 사이인 경우에는 Lee 檢定法이 Hodges 檢定法이나 Blumen 檢定法 보다 강세를 나타냈으나, 移動의 방향이 90° 에서 120° 사이인 경우에는 오히려 Hodges 檢定法과 Blumen 檢定法이 Lee 檢定法 보다 강세를 나타내고있다.

Hodges의 檢定法은 有意水準이 큰 경우가 有意水準이 작을때 보다 강세를 나타냈고, Lee 檢定法은 移動의 방향이 90° 에서 120° 방향일때는 相關係數 ρ가 작을수록 강세를 나타냈다.

참고문헌

1. Anderson,T.W. : An Introduction to Multivariate Statistical Analysis, John Wiley and Sons, Inc., New York. (1957).
2. Bickel,P.J. : "On Some Asymptotically Nonparametric Competitors of Hotelling's T^2", AMS., **36**, 160-173. (1965).
3. Blumen,I. : "A New Bivariate Sign Test", JASA. **53**, 448-456. (1958).
4. Brown,B.M. and Hettmansperger,T.P. : "An affine invariant bivariate version of the sign test", J.R.Statist. Soc.B., **51**, 117-125. (1989).
5. Chatterjee,S.K. : "A Bivariate Sign Test for location", AMS.,**37**, 1771-1782. (1966).
6. Dietz,E.J. : "A Bivariate Nonparametric Tests for the One Sample Location Problem", JASA., **77**, 163-169. (1982)>
7. Hodges,J.L. : "A Bivariate Sign Test", AMS., **26**, 523-527. (1955).
8. Joffe,A. and Klotz,J. : "Null distribution and Bahadur Efficiency of the Hodges Bivariate Sign Test", AMS., **33**, 803-807. (1962).
9. Killeen,T.J. and Hettmansperger,T.P. : "Bivariate Tests for Location their Bahadur Efficiencies", AMS., **43**, 1507-1516. (1972).
10. Klotz,J. : "Null distribution of the Hodges Bivariate Sign Test", AMS., **30**, 1029-1033. (1959).
11. Klotz,J. : "Small Sample Power of the Bivariate Sign Tests of Blumen and Hodges", AMS., **35**, 1576-1582. (1964).
12. Lee,J.C. : "A Bivariate Sign Test with a Binomial Null Distribution", Ph.D. Dissertation. (1972).
13. Oja,H. and Nyblom,J. : "Bivariate Sign Test", JASA., **84**, 249-259. (1989).
14. Randles and Wolfe : Introduction to the theory of nonparametric statistics, John Wiley and Sons, Inc., New York. (1979).

A study of bivariate sign test

Song, Jeong
Dept. of Clinical Pathology
Kwangju Health College

> *Abstract* <

We introduced several Bivariate Sign Tests by Hodges, Blumen and Lee in this paper.

In the bivariate normal distribution with mean vector (μ_x , μ_y) and unit variance, we compared powers of some Bivariate Sign Tests to test null hypothesis H_0 against H_1 by changing the significance level α with the correlation coefficient ρ, Mahalanobis distance Δ^2, and the direction of shift θ in alternative hypothesis.

Because Hotelling's T^2 test has the same power under the same Mahalanobis distance Δ^2, by changing the direction of shift in alternative hypothesis, there is a significance to compare the T^2 test with other Bivariate Sign Tests.

As a result, Lee's Bivariate Sign Test is more powerful than other Bivariate Sign Tests when the direction of shift θ in alternative hypothesis is about 45° for positive ρ. But Lee's Bivariate Sign Test does not have a correlation with the significance level and number of samples. And Hodges Bivariate Sign Test has some strength when the significance level is high.